

### **Funcții. Proprietăți generale.**

**I)  $A(x_0, y_0) \in G_f \Leftrightarrow f(x_0) = y_0$**

Ex.

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + mx + m - 2$ . Determinați  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $A(1,5) \in G_f$ .
2. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 3x - 2$ . Determinați  $m \in \mathbb{R}$  știind că  $A(m+1, m-3) \in G_f$ .
3. Determinați funcția de gradul doi știind că  $A(1,3) \in G_f, B(0,1) \in G_f$  și  $C(-1,1) \in G_f$ .

**II) Intersecția graficului cu axele de coordonate.**

**$G_f \cap Ox$ : rezolvăm ecuația  $f(x) = 0$**

**$G_f \cap Oy$ : calculăm  $f(0)$ .**

Ex.

4. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului cu axele de coordonate pentru:
  - a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$ .
  - b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + 8$ .
  - c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(x^2 + x + 2)$ .
5. Determinați distanța dintre punctele de intersecție ale graficului funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 6$  cu axele de coordonate.

**III) Intersecția a două grafice.**

**$G_f \cap G_g$ : rezolvăm ecuația  $f(x) = g(x)$**

Ex.

6. Determinați coordonatele punctelor de intersecție ale graficelor funcțiilor:
  - a)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$  și  $g(x) = 8x + 4$ .
  - b)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - x - 3$  și  $g(x) = 4x - 6$ .
  - c)  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(x^2 + x + 2)$  și  $g(x) = \log_2(x^2 + 1)$ .
7. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabola  $y = 3x^2 + x - 5$  și dreapta  $y = 3x - 4$ .
8. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabolele  $y = x^2 + x + 3$  și  $y = 2x^2 + 3x - 1$ .
9. Arătați că dreapta  $y = 2x + 1$  este tangentă parabolei  $y = x^2 + 4x + 2$ .

#### IV) Imaginea (mulțimea de valori) ale unei funcții.

Def. Fie  $f: A \rightarrow B$ . Definim imaginea funcției  $f$  prin  $Im f = \{y \in B \mid f(x) = y, \forall x \in A\}$ .

Obs. Spunem că o funcție  $f$  este mărginită dacă  $Im f$  este mulțime mărginită.

Ex.

10. Să se determine  $Im f$  pentru:

- a)  $f: [-2, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$
- b)  $f: [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x - 3$
- c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
- d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$
- e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ .

#### V) Funcții pare/impare

Def.

- 1.  $f$  este pară dacă  $f(-x) = f(x)$ .
- 2.  $f$  este impară dacă  $f(-x) = -f(x)$ .

Ex.

11. Studiați paritatea următoarelor funcții

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2 \sin x}{x^2+1}$
- b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2 \cos x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$
- c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

#### VI) Funcții monotone

Ex.

12. Studiați monotonia funcțiilor

- a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ .
- b)  $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2 \ln x$ .
- c)  $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x-1}{x-2}$

## VII) Funcții periodice

Def. Spunem că  $f: A \rightarrow B$  este periodică dacă există  $t \in \mathbb{R}^*$  astfel încât

$$f(x + t) = f(x), \forall x \in A.$$

Obs. 1 Cea mai mică perioadă pozitivă se numește *perioada principală* și se notează  $T$ .

Obs.2 Dacă  $t$  este perioadă a funcției  $f$ , atunci  $kt, k \in \mathbb{Z}^*$  este de asemenea perioadă pentru  $f$ .

Ex.

13. Arătați că  $T$  este perioadă pentru  $f$  unde

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{x}{2}, T = 4\pi$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{x}{3} \cdot \cos \frac{2x}{3}, T = 6\pi$

c)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x + \frac{\cos^2 x}{1+|\sin x|}, T = \pi$

d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left\{ \frac{2x+1}{3} \right\}, T = 1$

e)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{\{x\}(1-\{x\})}, T = 1.$

14. Determinați perioada principală a funcțiilor:

a)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin \frac{5x+1}{4}.$

b)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos \frac{2x-3}{3}.$

## VIII) Compunerea funcțiilor

Def. Fie  $f: A \rightarrow B$  și  $g: B \rightarrow C$ . Definim  $g \circ f: A \rightarrow C$  prin  $(g \circ f)(x) = g(f(x)), \forall x \in A$ .

Ex. :.....

## IX) Funcții injective, surjective, bijective. Inversa unei funcții.

Def. Spunem că  $f: A \rightarrow B$  este injectivă dacă  $\forall x_1 \neq x_2 \in A \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$

Obs. Spunem că  $f: A \rightarrow B$  este injectivă dacă  $\forall x_1, x_2 \in A$  a.î.  $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$

Def. Spunem că  $f: A \rightarrow B$  este surjectivă dacă  $\forall y \in B \Rightarrow \exists x \in A$  a.î.  $f(x) = y.$

Def. Spunem că  $f: A \rightarrow B$  este bijectivă dacă este și injectivă și surjectivă.

Teoremă. O funcție  $f: A \rightarrow B$  este inversabilă  $\Leftrightarrow f$  este bijectivă.

Ex.

15. Arătați că următoarele funcții sunt inversabile și precizați inversa lor:

- a)  $f: [-2, 3] \rightarrow [-7, 3], f(x) = 2x - 3$
- b)  $f: (0, \infty) \rightarrow (2, \infty), f(x) = \sqrt{2x + 4}$ .
- c)  $f: (1, \infty) \rightarrow (4, \infty), f(x) = x^2 + x + 2$
- d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty), f(x) = 3^x + 1$
- e)  $f: (2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(3x - 6)$ .
- f)  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$
- g)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 1 \\ 4x - 1, & x < 1 \end{cases}$
- h)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \max\{2x - 1, 3x + 2\}$
- i)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \min\{x - 2, 3x + 2\}$

16. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \geq 3 \\ x + a, & x < 3 \end{cases}$  este bijectivă.

17. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & x \geq 2 \\ 2x + a, & x < 2 \end{cases}$  este bijectivă.

18. Se consideră funcția  $f: \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \sqrt{3x - 2}$ .

- a) Să se arate că funcția este inversabilă și să se determine inversa ei.
- b) Să se rezolve ecuația  $\sqrt{3x - 2} = \frac{x^2 + 2}{3}$ .

19. Se consideră funcția  $f: \left(\frac{4}{5}, \infty\right) \rightarrow (0, \infty), f(x) = \sqrt{5x - 4}$ .

- a) Să se arate că funcția este inversabilă și să se determine inversa ei.
- b) Să se rezolve ecuația  $\sqrt{5x - 4} = \frac{x^2 + 4}{5}$ .

20. Se consideră funcția  $f: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty), f(x) = \log_3(2^x + 1)$ .

- a) Arătați că funcția  $f$  este strict crescătoare.
- b) Arătați că funcția  $f$  este inversabilă și aflați inversa ei.
- c) Rezolvați ecuația  $\log_3(2^x + 1) = \log_2(3^x - 1)$ .

21. Se consideră funcția  $f: (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_2(3 - x)$ .

- a) Arătați că funcția  $f$  este strict descrescătoare.
- b) Arătați că funcția  $f$  este inversabilă și aflați inversa ei.
- c) Rezolvați ecuația  $\log_2(3 - x) + 2^x = 3$ .